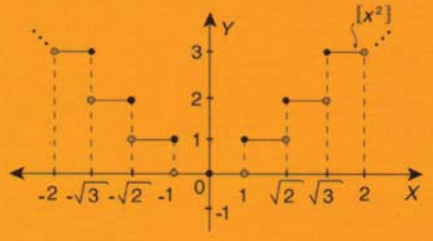
Compendio Académico de Matemática

ÁLGEBRA

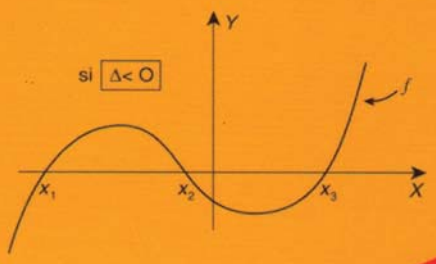
$$\frac{3x^4+75x-92}{x^2+2x-4}$$

	1	3	0	0	75	-92
-2			-6	12		
4				12	-24	
					-48	96
		3	-6	24	3	4



$$f(x) = x^3 + px + q = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$



LUMBRERAS
Editores

ÍNDICE

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO I CONJUNTOS NUMÉRICOS Y LEYES DE EXPONENTES	7
CAPÍTULO II POLINOMIOS	18
CAPÍTULO III PRODUCTOS NOTABLES	28
CAPÍTULO IV DIVISIÓN POLINOMIAL	37
CAPÍTULO V NÚMEROS REALES	45
CAPÍTULO VI FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS	52
CAPÍTULO VII NÚMEROS COMPLEJOS	62
CAPÍTULO VIII TEORÍA DE ECUACIONES	77
CAPÍTULO IX ECUACIONES POLINOMIALES DE GRADO SUPERIOR	87
CAPÍTULO X MATRICES Y DETERMINANTES	101

Página

CAPÍTULO XI
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 117

CAPÍTULO XII
SISTEMAS DE ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR Y NO LINEALES 123

CAPÍTULO XIII
DESIGUALDADES 130

CAPÍTULO XIV
INECUACIONES 139

CAPÍTULO XV
VALOR ABSOLUTO 151

CAPÍTULO XVI
FUNCIONES 157

CAPÍTULO XVII
LOGARITMOS 188

CAPÍTULO XVIII
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL EN UNA VARIABLE REAL 200

CAPÍTULO XIX
DERIVADA DE UNA FUNCIÓN 209

CAPÍTULO XX
BINOMIO DE NEWTON 221

CAPÍTULO XXI
SUCESIONES Y SERIES 233

5. Sean {a; b; c}⊂N tales que

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}=4$$

Halle el reducido de

$$\frac{\sqrt[a+b]{2^{a-b}}\cdot\sqrt[b+c]{2^{b-c}}}{\sqrt[a+c]{2^{a-c}}}$$

A) 16 B) 128 C) 2
D) 1 E) 32

6. Simplifique

$$\frac{(100)^3(21)^4(27)^2}{2(6)^5(15)^2(35)^4}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 15 C) 21
D) 27 E) 1

7. Halle el exponente final de Z en

$$\sqrt[10]{z\sqrt[10]{z^3\sqrt[10]{z^5\sqrt[10]{z^7\ldots}}}}$$

A) $\frac{10}{81}$ B) $\frac{14}{91}$ C) $\frac{9}{100}$
D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{11}{81}$

8. Si $x^x=2^{x-1} \wedge a^2=27^{a-1}$
con $\{a; x\} \subset \mathbb{Q}^+$
Determine el valor de $a+x$

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

9. Si $ax \neq 0$ simplifique

$$\frac{\left[(3x)^{-1}+(6a)^{-1}\right][2a+x]^{-1}}{(xa)^{-1}}$$

A) $(xa)^{-1}$ B) 6^{-1} C) xa
D) x E) a

10. Si $a^n=3$ calcule

$$\frac{a^{n^2}\left(a^{2a^n}\right)^n\left(7^{-n^a}\right)^{n^{-a}}}{\underbrace{3.3.3\ldots3}_{(n+6)\text{ veces}}}$$

A) $\frac{1}{7}$ B) an C) (n+6)
D) $\frac{1}{a}$ E) $\frac{1}{n}$

11. Si $x^x=6$; $x>0$ x es par
reduzca

$$\frac{\left[x^{x^{x^x}}+(-x)^{-(-x)^{x^x}}\right]x^{-x^6}}{x^{-2x^6+3}+x^3}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) x^3
D) x^{-3} E) $\frac{1}{x}$

12. Si $M=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}\ldots}}$

$N=3+\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt{3\cdot\ldots}}}$

Halle MN

A) 12 B) 18 C) 1
D) 6 E) 24

9. Halle el valor numérico de la expresión

$$J(x,y,z)=\frac{x^2}{yz}+\frac{z^2}{xy}-\frac{y^2}{xz}$$

cuando $x=87$, $y=222$ $z=135$

A) -3 B) 6 C) 3
D) 1 E) -6

10. Halle el valor numérico de

$$S(x)=\sqrt{\frac{6(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt[4]{2x}}}$$

Si $x+2=34\sqrt{2x}$, $x>0$

A) 0 B) 4 C) 6
D) -6 E) 1

11. Sea $P(x)=(2x)^{10}+(2x)^9+(2x)^8+\ldots(2x)+1$

halle $\dfrac{P(-1)-\frac{1}{3}}{P(1)+1}$

A) 2^{-1} B) 3^{-1} C) 4
D) 4^{-1} E) 2

12. Sea $f(x)=3x+1$,
si $f(x-1)+f(x+3)+f(a)=2f(x)$
halle $3a-1$

A) -4 B) 8 C) -8
D) 7 E) -9

13. Sea $f(x)=x^2+4x+7$
Halle $f(\sqrt{2}-2)+f(\sqrt{3}-2)$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 11
D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) 5

14. Dado $2f(x-1)-7=7x-\dfrac{f(x-1)}{3}$

halle $f(x)+f(2x)$

A) $3x+b$ B) $3x+3$ C) $6x+6$
D) $9x+12$ E) $3x$

15. Sea $f\left(\dfrac{x^2+a}{x^2-b}\right)=x^2-b$, halle $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$

A) b^2-a^2 B) $b-a$ C) a^{-1}
D) $\dfrac{a^2+ab}{b-a}$ B) ab

16. Si se verifica la identidad

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)}\equiv\frac{x^2-x+k}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

halle el valor de $kB+A$

A) -8 B) -11 C) -2
D) 8 E) -5

17. Halle el grado absoluto mínimo del polinomio

$$M(x,y)=\pi x^{a-4}y^{\frac{a}{2}}-x^{a-5}y^{\frac{a}{4}+1}-\sqrt{2}x^{a+2}y^{\frac{a}{2}+3}$$

A) 17 B) 8 C) 14
D) 13 E) 15

18. Si $f(x^2+x)=x$; además

$$f(x)=a\sqrt{1+bx}-\frac{1}{2}\ ,\ a>0$$

calcule ab

A) 4 B) 2 C) -2
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $-\dfrac{1}{2}$

19. Halle el valor numérico del polinomio

$$P(x)=\left(\frac{100}{99}x\right)^2-\left(\frac{100}{99}x\right)+1$$

cuando

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{9900}$$

A) -1 B) $-\frac{100}{99}$ C) 1

D) 0 E) $\frac{100}{99}$

20. ¿Cuál será el valor de m en el polinomio

$P(2x-1)=(5x-1)^m+(2x+1)^m-2x+1$

si la suma de coeficientes y el término independiente de $P(x)$ suman

$$24+\left(\frac{3}{2}\right)^m+2^m$$

A) 3 B) 1 C) 5

D) 4 E) 2

21. Dado $f(x)=\frac{2x+1}{x}$,

halle

$$M=f(1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\ldots f\left(\frac{1}{20}\right)$$

A) 250 B) 200 C) 40

D) 230 E) 210

22. Indique el grado del siguiente polinomio:

$$P(x;y)=x^{n-2}+3y^{\frac{8}{n-1}}+5xy^{5-n}$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) Faltan datos E) 8

23. Sea $f(x)=ax+b$

halle $\dfrac{(a-1)f(\overbrace{\ldots f(f(f(b)))\ldots}^{n\text{ veces}})}{b}+1$

A) 1

B) $(a-1)^n$

C) a^n

D) a^{n+1}

E) $(a-1)$

24. ¿Para cuántos valores de n la expresión

$P(x,y)=y^{\frac{64}{n}}x^{5-n}$ es racional entero?

A) 4 B) 5 C) 6

D) 2 E) 3

25. Halle m y p para que el polinomio sea de grado 14 y la diferencia de sus grados relativos a x e y sea 4.

$P(x,y)=4x^{m+p+3}y^{p-2}+9x^{m+p+1}y^{p+4}-5x^{m+p-1}y^{p+1}$

A) 2; 7 B) 1; 7 C) 5;3

D) 3; 2 E) 5; 2

26. Clasifique la expresión reducida de

$$A(x)=\frac{(x+1)P(x)}{P(x)+1}$$

si $P(x)=\sqrt[3]{x}\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

A) Compleja

B) Trascendente

C) Racional entera

D) Racional fraccionaria

E) Irracional

PRODUCTO NOTABLE

Es el producto que al adoptar cierta forma particular, evita que se efectúe la operación de multiplicación escribiendo directamente el resultado.

Los principales productos notables son:

- **Trinomio cuadrado perfecto:**

  El desarrollo de un binomio al cuadrado nos da el cuadrado del primer término, más el doble del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$$

Consecuencias:

$$a^2+2a+1 \equiv (a+1)^2$$

$$a^2-2a+1 \equiv (a-1)^2$$

$$a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab$$

$$a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$$

Identidades de Legendre

$$(a+b)^2+(a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab$$

$$(a+b)^4-(a-b)^4 \equiv 8ab(a^2+b^2)$$

Identidad de Lagrange

$$(ax+by)^2+(ay-bx)^2 \equiv (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

- **Diferencia de cuadrados**

  El producto de dos binomios uno que presenta la suma de 2 expresiones y el otro la diferencia de las mismas expresiones es el cuadrado de la primera, menos el cuadrado de la segunda.

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

$$(a^m+b^n)(a^m-b^n) \equiv a^{2m}-b^{2n}$$

Consecuencias:

$$x-y=(\sqrt{y}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y});\ x\in R^+;\ y\in R^+$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\ldots \ldots(a^{2^n}+b^{2^n}) = a^{2^{n+1}}-b^{2^{n+1}}$$

- **Desarrollo de un trinomio al cuadrado**

  Al desarrollar un trinomio al cuadrado se obtiene la suma de cuadrados de los tres términos, más el doble de la suma de los productos tomados de dos en dos (Productos binarios).

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Consecuencias:

$$(ab+ac+bc)^2 \equiv (ab)^2+(ac)^2+(bc)^2+2abc(a+b+c)$$

- **Multiplicación de binomios con un término en común:**

  Al multiplicar dos binomios con un término en común se obtiene: el común al cuadrado, más el producto de la suma de no comunes por el común, más el producto de no comunes, es decir:

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$$

Consecuencias:

$(x + a)(x - b) \equiv x^2 + (a - b)x - ab$

$(x - a)(x - b) \equiv x^2 - (a+b)x + ab$

$(x^m + a)(x^m + b) \equiv x^{2m} + (a + b)x^m + ab$

- **Desarrollo de un binomio al cubo**

  Al desarrollar un binomio al cubo se obtiene: el cubo del primer término, más el producto del triple del primero al cuadrado por el segundo, más el producto del primero por el segundo al cuadrado, más el cubo del segundo término.

$(a + b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Consecuencias:

$(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 \equiv a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$

$(a+b)^3 + (a-b)^3 \equiv 2a(a^2+3b^2)$

$(a+b)^3 - (a-b)^3 \equiv 2b\,(3a^2+b^2)$

- **Suma y diferencia de cubos**

$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3 + b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3 - b^3$

A continuación daremos un resumen de los productos notables básicos y otros productos notables que se deben de conocer.

Principales productos notables

- **Trinomio cuadrado perfecto**

$(a \pm b)^2 \equiv a^2 \pm 2ab + b^2$

(*) Adviértase que: $(a-b)^2 \equiv (b-a)^2$

Corolario *Identidades de Legendre*

* $(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$ ..... (1)

** $(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$ ..... (2)

*** $(a+b)^4 - (a-b)^4 \equiv 8ab(a^2+b^2)$

Identidad de Lagrange

* $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

- **Diferencia de cuadrados**

$(a+b)(a-b) \equiv a^2 - b^2$

- **Desarrollo de un trinomio al cuadrado**

$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$

- **Desarrollo de un binomio al cubo**

$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$\equiv a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$(a-b)^3 \equiv a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$\equiv a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

- **Suma y diferencia de cubos**

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) \equiv a^3 + b^3$
$(a-b)(a^2 + ab+b^2) \equiv a^3 - b^3$

Desarrollo de un trinomio al cubo

$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$(a+b+c)^3 \equiv a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$

Producto de multiplicar binomios con un términos común

$(x + a)(x \pm b) \equiv x^2 + (a + b)x + ab$

También:

* $(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
** $(x-a)(x-b)(x-c) \equiv x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

Identidad trinómica (Argan'd)

$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \equiv x^4 + x^2 + 1$

$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \equiv x^4 + x^2y^2 + y^4$

En general:

$(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n})(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) \equiv x^{4m} + x^{2m}y^{2n} + y^{4n}$

- **Identidades adicionales**

Identidad de Gauss

** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

- $(a+b)(b+c)(c+a) + abc \equiv (a + b + c)(ab + bc + ca)$
- $x^4+4 \equiv (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

- **Igualdades condicionales**

Si: $a + b + c = 0$

Se verifican:

* $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
* $(ab + bc + ca)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$
* $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (***importante***)

Además:

* $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$
* $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right) = \frac{a^5+b^5+c^5}{5}$
* $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right) = \frac{a^7+b^7+c^7}{7}$

PROBLEMAS

1. Halle el valor de $x^3 - 3x^2 + 12x - 16$ cuando $x + \sqrt[3]{3} = 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{3}}$

A) $\sqrt[3]{9}$ B) 0 C) 2
D) 1 E) $\sqrt[3]{3}$

2. Sea $y = x - 1$, indique el valor de $\frac{(x^3-y^3)^4+\sqrt[4]{4}}{(1+3xy)^4+\sqrt{2}}$ tal que $\{x, y\} \subset R^+$

A) $1/\sqrt{2}$ B) 0 C) 1/2
D) $\sqrt{2}$ E) 1

3. Si $f(x)=ax^2+bx+c$ es un trinomio cuadrado perfecto, calcule $\frac{8b^2}{ac}$

A) 2 B) 32 C) 64
D) 8 E) 4

4. El equivalente reducido de
$[(a+b)^2-(a-b)^2][(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2]$
$\ldots[(a^n+b^n)^2-(a^n-b^n)^2]$ es

A) $(4ab)^{\frac{n(n+1)}{2}}$
B) $\left[4(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right]^n$
C) $(4ab)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
D) $(4ab)^n$
E) $\left[4(ab)^{\frac{n+1}{2}}\right]^n$

5. Si x es un número, tal que
$10x^4+10x^2+4=3x^2-6$
halle el valor de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

A) $\frac{13}{7}$ B) 1 C) $\frac{13}{10}$
D) $\frac{10}{13}$ E) $\frac{7}{10}$

6. Respecto a la condición
$a^3+b^3+c^3=3abc$; $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$
indique el valor de verdad en cada proposición:
I. Se cumple si $a=b=c \wedge a+b+c=0$
II. Se cumple solo si $a+b+c=0$
III. Siempre se cumple si $a+b+c\neq 0$

A) FFF B) VVV C) VVF
D) FVV E) VFF

7. Dadas las condiciones
$x=a(a+1)+b(b+1)+ab$
$y=a(a-1)+b(b-1)+ab$, $a\neq b$
al reducir la expresión $\frac{x^2-y^2}{4(a^3-b^3)}$
se obtiene

A) 4a B) $\frac{b}{a}$ C) a – b
D) $\frac{a+b}{a-b}$ E) $\frac{a}{b}$

8. Siendo $\alpha=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$, $\beta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
halle el valor de $\alpha+\beta+\alpha\beta$

A) 4 B) 3 C) –1
D) 1 E) 0

9. Si $S^2=(x^2+y^2+z^2+S)^2-(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)$, S es equivalente a

A) $xy+xz+yz$
B) $x+y+z$
C) $2(xy+xz+yz)$
D) xyz
E) $x^2+y^2+z^2$

10. Si $m^2+\frac{1}{m^2}=2$, halle
$\frac{m^{12}+1}{3m^6}$

A) 2/3 B) 2 C) 2/6
D) 1 E) 3/2

11. Sea $M=(1+x)^3+(1-x)^3-6x^2+8$
$N=(1+x)^3-(1-x)^3-2x^3$
halle MN

A) 1 B) $60x^2$ C) $60x$
D) 60 E) 8

12. Si $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=0$, $xyz \neq 0$

calcule

$$\left(\frac{x^2+yz}{x^2}\right)\left(\frac{y^2+xz}{y^2}\right)\left(\frac{z^2+xy}{z^2}\right)$$

A) 0 B) xyz C) -1
D) 1 E) $\frac{1}{xyz}$

13. Halle el valor de

$$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{3a^{-2}+b^{-2}} \text{ si } b=\sqrt[3]{0,3},\ a=\sqrt{0,2}$$

A) 0,12 B) 1,2 C) 0,06
D) 0,6 E) 0,02

14. Siendo $a + b = m$, $ab = n$, el equivalente de $(a+b)^4 - (a-b)^4$ es

A) $4n(2m^2-n)$
B) $8n(2m^2-n)$
C) $8n(m^2-2n)$
D) $n(m^2-2n)$
E) $4n(m^2-2n)$

15. Simplifique

$$\frac{\left(m+2-\frac{2}{m}\right)^2+\left(m-2-\frac{2}{m}\right)^2-\frac{8}{m^2}}{m^2\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-\left(m-\frac{1}{m}\right)^2\right]}$$

A) m B) m^2 C) 2
D) 1/2 E) 1

16. Halle el equivalente de
$4(a - b)(a - c) + (b - c)^2$
si $2a = b+c+d$

A) $\frac{d^2}{2}$ B) $\frac{2d^2}{3}$ C) $\frac{d^2}{3}$
D) $2d^2$ E) d^2

17. Si $x=1,5\ a + 0,5\ \frac{b^2}{a}$

$y=1,5\ b + 0,5\ \frac{a^2}{b}$

$ab=32$

calcule el valor de $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}$

A) 64 B) 2 C) 4
D) 16 E) 32

18. Si $a+\frac{1}{a}=5$

halle $E=\sqrt{\frac{(a^5+a^3)(a^3+a)}{4a^6}}$

A) 2 B) 1 C) 5/2
D) 5 E) 2/5

19. Reduzca

$$\frac{[(x+2)^2+(x-2)^2-(x+2)(x-2)-13]}{(x+3)(x-3)+8}$$

A) -13 B) $(x+2)$ C) 3
D) x E) 1

20. Si $a^3 + b^3 + c^3 = 3$
$(a+b)(a+c)(b+c) = -1$
halle el valor de $\frac{a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}{(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})^2}$

A) -2 B) -1 C) 3
D) 1 E) 2

21. Sean $\{x,y\} \subset \mathbb{R}$, tales que cumple

$$\frac{1}{3x-2y}+\frac{1}{2x+3y}=\frac{4}{5x+y}$$

halle el valor numérico de $\frac{x+2y}{2x-y}$

A) $(7/9)^{-1}$ B) 5/3 C) 7/6
D) 5/4 E) $(9/7)^{-1}$

22. Si $\frac{4}{x}+x=-2$ es el valor de

$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ es

A) 48 B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) 8

D) 54 E) 63

23. La expresión

$$\frac{m(m^3-n^3)(m^2-mn+n^2)}{n(m-n)}-\frac{n(m^3+n^3)(m^2+mn+n^2)}{m(m+n)}$$

es equivalente a

A) $\frac{m^5}{n}+\frac{n^5}{m}$ B) $\frac{m^4}{n}+\frac{n^4}{m}$ C) $\frac{m^4}{n}-\frac{n^4}{m}$

D) $\frac{m^4}{n}+\frac{n^5}{m}$ E) $\frac{m^5}{n}-\frac{n^5}{m}$

24. Simplifique

$$\frac{\left(3m+\frac{1}{2m}\right)^2-\left(2m-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{3}{4m^2}+3}{m^2+2}$$

A) 3 B) $5\,m^2$ C) 1

D) 5 E) 2 m

25. Simplifique

$$\frac{\left[(x^2+2\sqrt{2})^2+(x^2-2\sqrt{2})^2\right]^2}{\left[(x^2+1)(x^2+8)-9x^2\right]^2}$$

A) $3x$ B) 4 C) 3

D) $(x+3)$ E) $(x+3)^{-1}$

26. Si se cumple que

$$a+b+c=\frac{2}{7}(a^2+b^2+c^2)=\frac{2}{17}(a^3+b^3+c^3)=4$$

halle abc

A) –6 B) 3 C) 16

D) 4 E) 8

27. Si $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

$$b=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$$

halle a^2+b^2

A) 10 B) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

D) 14 E) 6

28. Halle el valor numérico de

$(a+b+c)(a+b+c+1)+(a+b-c)(a+b-c+1)+$
$(a-b-c)(a-b-c+1)+(a-b+c)(a-b+c+1)$
cuando $a^2+b^2+c^2=2$

A) 6 B) 16 C) 8

D) 2 E) 4

29. Si $x+y=3\sqrt{xy}$, halle $xy\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$

A) 7 B) xy C) 3

D) $\frac{x+y}{2}$ E) 1

30. Reduzca

$$\frac{(4a-6)(2-a)+2(a-3)(1-a)-2(2-a)(a-1)}{-(2a-3)^2-(a-1)^2-(a-2)^2}$$

A) 2 B) 0 C) –2

D) 1 E) –1

31. Calcule el valor de

$$\frac{y^6+z^6+x^2(x^4-9y^2z^2)}{x^4(3yz-x^2)+y^3z^3}$$

si $z^{-1}(x+y)=-1$

A) 1/2 B) –2 C) 1

D) 2 E) –1/2

División Polinomial

Identidad fundamental de la división

$$D(x)=d(x).q(x)+R(x)$$

CAPÍTULO IV

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- *Relacionar la división numérica con la división polinomial.*
- *Conocer técnicas para dividir: Método de Horner y regla de Ruffini.*
- *Calcular residuos de las divisiones sin necesidad de dividir.*

Introducción

El conjunto numérico más conocido por todos es el de los enteros positivos; el cual se representa por $\mathbb{N}$. *Igualmente conocido es el conjunto* Z *de todos los enteros: los positivos, negativos y cero. La mayoría de sus propiedades son muy conocidas.*

Efectuar la operación de división ha sido una necesidad inevitable para el ser humano, en un primer momento cuando se desarrolló la aritmética rudimentaria se efectuó la división entre números enteros para ello se creó el algoritmo de Euclides y como consecuencia de la operación de división nace la teoría de la divisibilidad entre números enteros, sin embargo no solamente se pueden dividir números enteros, también podemos dividir polinomios y en forma análoga aplicar una teoría de divisibilidad entre polinomios.

Identidad fundamental de la división (algoritmo de la división)

DEFINICIÓN

Sean $D(x)$; $d(x)$ dos polinomios no constantes.

Al efectuar $D(x) \div d(x)$ se obtienen dos únicos polinomios $q(x)$ y $R(x)$ tales que cumplen

$$D(x) \equiv d(x)\, q(x) + R(x) \quad \ldots (*)$$

Donde

$D(x)$: polinomio dividendo

$d(x)$: polinomio divisor

$q(x)$: polinomio cociente

$R(x)$: polinomio residuo o resto.

Además

$R(x) \equiv 0 \vee \text{grad}\,[R(x)] < \text{grad}\,[d(x)]$

Nota

i. Si en (∗) $R(x) \equiv 0$ se dice que la división es exacta, luego se tendría:

$$D(x) \equiv d(x)\,q(x) \quad \text{ó} \quad \frac{D(x)}{d(x)} \equiv q(x)$$

ii. Si en (∗) $R(x) \neq 0$ la división se dirá inexacta, de aquí:

$$D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x) \quad \text{ó}$$

$$\frac{D(x)}{d(x)} \equiv q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

Ejemplo:

De la siguiente identidad:

$$x^3 + 2 \equiv (x-1)(x^2 + x + 1) + 3$$

Se podría afirmar:

$D(x) \equiv x^3 + 2$
$d(x) \equiv x - 1$
$q(x) \equiv x^2 + x + 1$
$R(x) \equiv 3$

$$\underbrace{\text{grad}[D]}_{3} \geqslant \underbrace{\text{grad}[d]}_{1}$$

$$\underbrace{\text{grad}[R]}_{0} < \underbrace{\text{grad}[d]}_{1}$$

TEOREMAS

1. grad[q] = grad[D] – grad[d]
2. máx grad[R] = grad[d] – 1

Ejemplo:

En la siguiente división:

$$\frac{2x^7 - x + 6x^3 - 1}{5x^3 + x + 7}$$

grad[D] = 7
grad[d] = 3

Luego, grad[q] = 7 – 3 = 4
máx grad[R] = 3 – 1 = 2

CRITERIO GENERAL PARA DIVIDIR

Los polinomios dividendo y divisor deberán de encontrarse **completos** (caso contrario se representará con ceros a los términos que faltan y por lo general **ordenarlos en forma descendente**.

Ejemplo:

el polinomio: $P(x) = 3x - 5x^3 + x^6 - 8$
es equivalente a:

$$P(x) = x^6 + 0x^5 + 0x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 3x - 8$$

y diremos que presenta a todos sus términos

MÉTODOS PARA DIVIDIR

- **Método de Horner**

  Es el más general y se utiliza para dividir polinomios de cualquier grado

  Esquema

	c	coeficientes	del $D_{(x)}$
Cambian de signo	o e f del $d_{(x)}$	+ × +	+ + ··· +
		coefic. del $q_{(x)}$	coefic. del $R_{(x)}$

Línea Divisoria

Nota

Ubicar la línea divisoria contando en el esquema, de derecha a izquierda tantas columnas como el grado del divisor.

Ejemplo:

Divida:

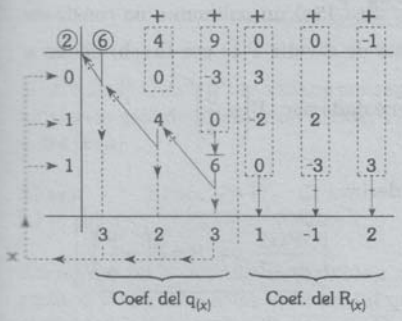
$$\frac{4x^4 + 9x^3 + 6x^5 - 1}{x + 2x^3 - 1}$$

Resolución:

Preparando los polinomios:

$D(x) \equiv 6x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 0x^2 + 0x - 1$
$d(x) \equiv 2x^3 + 0x^2 + x - 1$

Aplicando Horner



Como D(x) y d(x) presenta todos sus términos y están ordenados en forma descendente, entonces q(x) y R(x) también debe presentar todos sus términos y están ordenados descendentemente.

Además como:
grad[q]=5–3=2 y maxgrad[R]=3–1=2

se tiene:
$q(x) = 3x^2 + 2x + 3$
$R(x) = 1x^2 - 1x + 2 = x^2 - x + 2$

- **Regla de Ruffini**

Es un caso particular del método de Horner y se usará cuando el divisor es de primer grado o transformable a un polinomio lineal.

Esquema de cocientes:

Suponiendo que el divisor tiene la forma: $ax + b$; $a \neq 0$

$ax+b=0$	Coeficientes de D(x)	
$x=-\frac{b}{a}$	↓ + + + . . . +	
÷ a		Resto
	Coeficientes de q(x)	

Nota

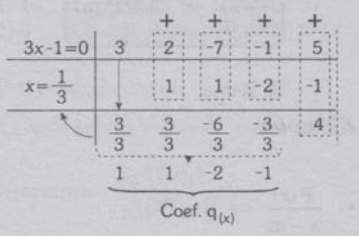
En el esquema de Ruffini el resto obtenido siempre es una constante.

Ejemplo 1:

Divida

$$\frac{3x^4 - 7x^2 + 2x^3 - x + 5}{3x - 1}$$

Resolución:



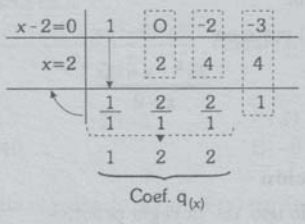
como grad[q]=4 – 1 = 3, se tiene:
$q(x) = 1x^3 + 1x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1$
Resto = 4

Ejemplo 2:

Divida

$$\frac{x^3 - 2x - 3}{x - 2}$$

Resolución:



Como grad[q]=3 – 1 = 2
tenemos: $q(x) = x^2+2x+2$
Resto = 1

11. Calcule b en la división $\frac{ax^9+bx^8+1}{x^2-2x+1}$

si es exacta

A) 10 B) 9 C) –8
D) 8 E) –9

12. En la división $\frac{2x^5+3x^4+bx^3+6bx^2+x+a}{x^2-x+b}$

el resto es $2x+3$, la suma de coeficientes del cociente es mayor a 15, calcule ab

A) 7 B) 9 C) 8
D) 2 E) 4

13. El valor de c que verifica si el polinomio $f(x)=ax^n+bx^{n-1}-cx+1$ es divisible por $(x-1)^3$ es

A) $\frac{n}{2-n}$ B) $\frac{n-1}{n}$ C) $\frac{n}{n-2}$
D) n E) $\frac{n}{n-1}$

14. Si dividimos $P(x)$ entre (x^2+5) se obtiene un cociente $q(x)$ y un residuo igual a $(2x-5)$, ¿cuál es el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x+2)$? Sabiendo que $q(x)$ entre $x+2$ da por resto 4.

A) –5 B) 27 C) 36
D) 0 E) 4

15. Encuentre a ; b enteros para que la división

$$\frac{2x^4-3x^3+(a+b)x^2+(b-3a+2)x+3b(a-b-1)+20}{x^2-x+b}$$

sea exacta

A) 1; 2 B) –1; 2 C) –2; –1
D) 5; –1 E) –2; –5

16. El polinomio x^4-mx^3+nx-p es divisible entre $(x-q)^3$, calcule el valor de $\frac{m\sqrt{mn}}{n}$

A) 4 B) 5 C) 1
D) 2 E) 3

17. Cuando se divide $\frac{16x^4+2x+1}{-2x-1}$ el cociente es

$$q(x)=\left(\frac{a}{3}-1\right)x^3+\left(\frac{b}{4}-2\right)x^2+\left(\frac{c}{5}-3\right)x+\left(\frac{d}{6}-4\right)$$

calcule a+b+c–d

A) 14 B) –1 C) 0
D) 11 E) –16

18. Indique el residuo de la división

$$\frac{(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)\ldots(x^{64}+1)}{x^2-x+1}$$

A) $x+1$ B) 0 C) –1
D) $1-x$ E) $x-1$

19. Cuando dividimos un polinomio $F(x)$ entre $(x-1-\sqrt{2})$ y $(x-1+\sqrt{2})$ se obtiene como restos 1 y $\sqrt{2}$ respectivamente, si ambas divisiones tienen el mismo cociente, halle el resto de $F(x)\div(x-1)$

A) $1+\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$
D) $-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

20. Determine el resto en la división

$$\frac{x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+\ldots+x^3+x^2+x+1}{(1+x^2)(1+x)}$$

A) 0 B) $x+1$ C) x^2+1
D) $2x^2$ E) $2x$

21. Calcule $\frac{a}{b}$ si luego de dividir

$$\frac{(a-b)x^n+(a-b)^2x^{n-1}+(a-b)^3x^{n-2}+\ldots+(a-b)^{n+1}}{x-a+b}$$

el resto es $(n+1)(4b)^{n+1}$, $n\in Z^+$, $a\neq b$

A) 7 B) 11 C) 1
D) 3 E) 5

22. Al dividir $P(x)$ entre x^2-3 el cociente es $q(x)$ y el resto $(5x-2)$, cuando dividimos $q(x)$ entre $(x+3)$ el residuo es -2. Calcule el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x^2-3)(x+3)$.

A) 0
B) x^2-5x+4
C) x^2-5x-4
D) $-2x^2-5x-4$
E) $-2x^2+5x+4$

23. Al dividir $P(x)$ entre (x^2+x+1) se obtuvo por residuo $(x+1)$ y al dividir entre (x^2-x+1) el resto es $x-1$, calcule el residuo de $P(x)$ entre x^4+x^2+1

A) $-x+1$ B) x^3+x C) x^3-x
D) x^3 E) x

24. Dado el polinomio $P(x)=ax^{n+1}+bx+1$, calcule b en términos de n para que sea divisible por $(x-1)^2(cx+d)$

A) $-\frac{n+1}{n}$ B) $-n-1$ C) $n+1$
D) $\frac{n+1}{n}$ E) $-n+1$

25. Si el resto de la división

$$\frac{(x-3)^{11}+(x-4)^3}{(x-3)(x-4)}$$

tiene la forma $\alpha x+\beta$, calcule $\alpha\beta$

A) 7 B) 14 C) -20
D) -7 E) -14

26. Halle el coeficiente de la siguiente división

$$\frac{512x^9-1}{2x-1}$$

dé como respuesta la suma de sus coeficientes

A) 512 B) 511 C) 36
D) 0 E) 360

27. Calcule a+b en la división exacta

$$\frac{5x^4-11x^3+bx^2+(a-8)x+3a-6}{x^2-ax-2+a}$$

A) -1 B) -4 C) 0
D) 9 E) 1

28. Encuentre el residuo al dividir

$$\frac{(x-n+1)^2+(x-n)^2+(x-n-1)^2+\ldots+(x-2n+2)^2}{x-2n+1}$$

A) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

B) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

C) n^2
D) $n(n-1)$
E) $n(n+1)$

29. Encuentre el residuo

$$\frac{(x+2)^4(x+6)(x-3)}{(x+2)^3(x+3)}$$

de la división

A) $-18(x+2)^3$
B) $-27(x+2)^3$
C) -18
D) $18(x+2)^3$
E) 27

30. Determine m.n.p tal que el polinomio $f(x)=x^5-2x^4-6x^3+mx^2+nx+p$ sea divisible por $Q(x)=(x-3)(x+1)(x-1)$

A) –120 B) 240 C) 12
D) –240 E) 24

31. Cuando dividimos $P(x)$ entre $(x+2)^3$ el residuo es $(2x-1)(x+3)+2x$, ¿cuál es el resto de $P(x)$ entre $(x+2)$?

A) –2 B) –1 C) 4
D) 2 E) –9

32. Si dividimos $P(x)$ entre $(x+n)^4$ el resto es $x^3-3n^2x+2n^3$ calcule el resto de dividir $P(x)$ por $(x+n)^2$

A) $nx+2n^3$ B) $4n^3$ C) n^3x
D) $nx+n^3$ E) n^2x+2n^3

33. Un polinomio $P(x)$ de cuarto grado al ser dividido separadamente por (x^2+x+1) y (x^2-x+2) se obtiene el mismo residuo $(3x-5)$, pero al dividirlo por $(x+1)$ es 12, calcule $P(0)$.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 1 E) 2

34. Calcule m, si es exacta la división

$$\frac{x^{3a+2}+x^{3b+1}+mx^{3c}}{x(x+1)+1} \quad \forall\ a, b, c \in Z^+$$

A) 0 B) 2 C) –2
D) –1 E) 1

35. Si la división

$$\frac{ax^5+bx^4+cx^3+9x^2-18x+8}{2x^2+3x-4}$$ es exacta,

calcule $\frac{a}{2}+b+c$

A) 3 B) –2 C) 4
D) 1 E) 2

36. En el siguiente esquema de Horner

a	n	2b	m	c
–b		–bm	3m	
c			–bp	cp
	m	p	n	c

encuentre el divisor si $n>b>a>c>m>0$ y b por

A) $4x^2+6x+3$
B) $2x^2-3x+6$
C) $6x^2+6x+3$
D) $4x^2+6x-3$
E) x^2+2x+3

37. En la división

$$\frac{a^2x^{a+2}-(2a^2+2a-1)x^{a+1}+(a+1)^2x^a-16x+399}{x^3-3x(x-1)-1}$$

$q(x)$ es el cociente y $R(x)$ el resto, halle el término principal del cociente si $q(1)=R(1)$

A) $10x^4$ B) $100x^9$ C) $10x^{10}$
D) $100x^4$ E) $100x^{10}$

38. Cuando se divide $(P(x)-2x+1)$ entre $(x^2-10x+25)$ el resto es $(3x-15)$ y al dividir $(P(x)+x+1)$ entre $(x^2+5x+25)$ el resto es $(x+10)$, calcule el resto de dividir $P(x)$ entre (x^3-125)

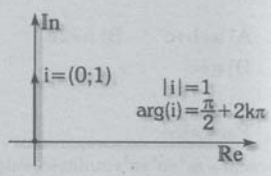
A) 7 B) 2 C) 16
D) 9 E) 4

39. Halle el residuo en la división

$$\frac{(x^8+16)^4+x^{13}+4x^4-1024^2}{x^2-2x+2}$$

A) $-64x-16$
B) 0
C) –2
D) $-64x-64$
E) 2^5

Números Complejos



CAPÍTULO VII

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- *Conocer las propiedades que tiene un nuevo campo numérico llamado "el campo complejo" para aplicarlo en la resolución de ecuaciones polinomiales.*
- *Efectuar operaciones con números complejos y poder desarrollar la habilidad operativa.*

Introducción

A través del tiempo el hombre tuvo que resolver ecuaciones; fruto del desarrollo de otras ciencias y para ello fue necesario diseñar nuevos conjuntos numéricos tales como los enteros, racionales, irracionales, reales, complejos, etc. Leopoldo Kronecker describió en el siglo XIX la evolución larga y gradual de la comprensión del sistema de números por el hombre.

Sabemos por ejemplo que cualquier número real al elevarlo al cuadrado será positivo o cero siempre. En cambio un número imaginario al ser elevado al cuadrado no tiene necesariamente que ser positivo y de ahí que estos nuevos números cumplirán nuevas propiedades, lo que nos ayudará a resolver problemas de ecuaciones más complicados.

También los números complejos son aplicados en circuitos eléctricos con corriente alterna, fenómenos ondulatorios, oscilaciones, vibraciones, resolución de ecuaciones diferenciales, etc.

A continuación daremos algunos alcances sobre Cardano. ***Gerolamo Cardano*** *es uno de los personajes más curiosos de la historia de las matemáticas.*

Nació en Pavía, Italia; fue el médico más famoso de su época, fue astrólogo de reyes príncipes y papas (estuvo encarcelado por haber publicado un horóscopo de Jesús), fue también jugador empedernido y, en sus tiempos libres, se dedicó a todos los aspectos de las ciencias y, en particular, a las matemáticas.

Resolución:

Efectuando por separado

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i \quad ;$$

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-\frac{2i}{2}=-i$$

Reemplazando tenemos

$W=(i)^5+(-i)^9=i-i=0$

$$\therefore W=0$$

Resultados importantes:

$(1+i)^2=2i$; $(1-i)^2=-2i$

$(1+i)^3=2i(1+i)$; $(1-i)^3=-2i(1-i)$

$(1+i)^4=-4$; $(1-i)^4=-4$

$$\frac{1+i}{1-i}=i \quad ; \quad \frac{1-i}{1+i}=-i$$

Ejemplo:

Simplifique:

$$\left[\frac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}}\right]^{2000}$$

Resolución:

Como $\dfrac{1+i}{1-i}=i$

entonces tenemos:

$$\left[\frac{1+i}{1-\dfrac{1+i}{1-i}}\right]^{2000}=\left[\frac{1+i}{1-i}\right]^{2000}=i^{2000}=i^4=1$$

RADICACIÓN EN $\mathbb{C}$

En la forma binómica estudiaremos la raíz cuadrada, en forma general se estudiará en base al teorema de De Moivré.

Definición

La raíz cuadrada de un número complejo z es un número complejo w tal que $w^2=z$.

En base a la raíz cuadrada de números reales positivos, probaremos que la raíz cuadrada de un número complejo siempre existe.

Teorema

Dado $z \in \mathbb{C}$, $\exists\ w \in \mathbb{C}$, tal que: $w^2=z$

Sea: $z=x+yi\ ;\ z\neq 0 \quad \wedge \quad w=a+bi$

Si $y>0$ entonces a $\wedge$ b tienen el mismo signo

Si $y<0$ entonces a $\wedge$ b tienen signos diferentes

$$\therefore W=\pm\left[+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+(*)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}.i\right]$$

Donde: $(*)$ es el signo de y

Ejemplo:

Halle la raíz cuadrada de: $3-4i$

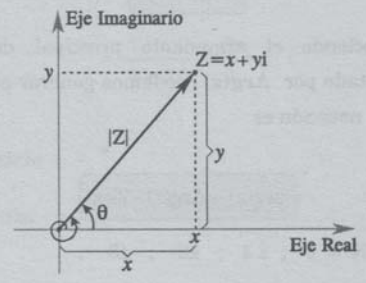
$$\Rightarrow w=\sqrt{3-4i}=$$

$$\pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2}}.i\right]$$

$$=\pm(\sqrt{4}-i)=\pm(2-i)$$

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea $z=a+bi$ un número complejo diferente del nulo. Es decir $|z|\neq 0$



Teorema

Dados los números complejos no nulos

$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

$w = |w|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$

Se verifican

1. $zw = |z|\,|w|(\cos(\theta+\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta+\alpha))$
2. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta-\alpha))$

Nota

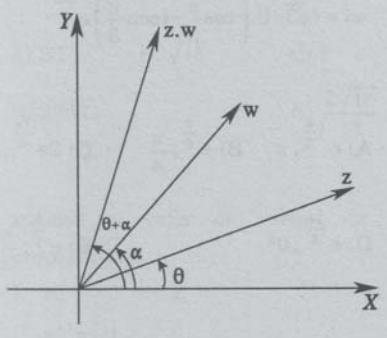
- Para multiplicar complejos en la forma polar se multiplica los módulos y se suma los argumentos.

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$$

- Para dividir complejo en la forma polar se dividen los módulos y se resta los argumentos.

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

Gráficamente para (1):



Teorema (de De Moivre)

Dados $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta);\ z \neq (0;0)$

$\wedge\ n \in N;$

se tiene $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$

Corolario:

$$\arg(z^n) = n\arg(z)\ ;\ n \in Z$$

Ejemplo:

Calcule: $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{60}$

Resolución:

$$1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) \ldots (\alpha)$$

$$1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) \ldots (\beta)$$

Dividiendo (α) entre (β)

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{2(\cos\pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3)}{2(\cos 5\pi/3 + i\operatorname{sen}5\pi/3)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{60} = \frac{(\cos\pi/3 + i\operatorname{sen}\pi/3)^{60}}{(\cos 5\pi/3 + i\operatorname{sen}5\pi/3)^{60}}$$

$$= \frac{\cos 60\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}60\frac{\pi}{3}}{\cos 60.\frac{5\pi}{3} + i\operatorname{sen}60.\frac{5\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{60} = \frac{(\cos 20\pi + i\operatorname{sen}20\pi)}{(\cos 100\pi + i\operatorname{sen}100\pi)}$$

$$= \frac{1+i(0)}{1+i(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejercicio

Calcule: $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{30} + (1-\sqrt{3}i)^{30}}{2^{31}}$

13. Si se cumple lo siguiente

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $|z_1|=|z_2|=3$ con $\text{Arg}(z_1)=\beta$; $\text{Arg}(z_2)=\alpha$ donde $\beta-\alpha=\pi$

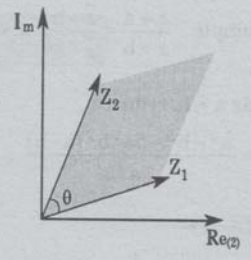
halle $|z_2+iz_1|^2+|z_1+iz_2|^2$

A) 12 B) 36 C) 2
D) 0 E) 3

14. En el siguiente gráfico se cumple:

$\text{Re}(z_1)=\text{Im}(z_2)$, $z_1.z_2=4i$, $\text{Arg}(z_1)=15°$

halle el área sombreada



A) $3\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

15. Si se cumple

$$\frac{1+ai}{a+i}+\frac{a+3i}{1-ai}=ki \text{ , } k;\ a\in\mathbb{R}$$

calcule k^4+1

A) 19 B) 20 C) 16
D) 17 E) 15

16. Calcule n si

$$\left[(1+i)^{\frac{1}{n}}+2(-2+2i)^{\frac{1}{3n}}+3(-4)^{\frac{1}{4n}}\right]^{n^2}=-6^{16}.4$$

A) 4 B) 6 C) 5
D) 2 E) 3

17. Sea el siguiente polinomio

$P(z)=a_oz^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_n$; $a_o\neq(0;0)$

donde $\{a_o; a_1; a_2; ...; a_n\}\subset\mathbb{C}$ y $a_k=i^{k+1}$ $k\geq 0$ s

se cumple que $P(i)=mi$; $m\in\mathbb{Z}^+$

halle $P(i^{m+2})$

A) i^2 B) i^4-1 C) $-i$
D) i E) $-i^2$

18. Dado un polinomio $P(x)$, si $P\left(e^{\frac{-i\pi}{2}}\right)=0$

y $P(x)=3x^6+(1+3i)x^5+ix^4+12x^2+4(1+3i)x+4i$, después de factorizar, indique el número de factores primos de coeficientes no reales.

A) 5 B) 6 C) 4
D) 3 E) 2

19. Si $z\in\mathbb{C}$ tal que

$$|z|^2+25-5z-5\bar{z}=25 \ \wedge\ 0<\text{Arg}z<\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\text{Arg}z+\text{Arg}(z^2-5z)+\text{Arg}(z-5)}{\text{Arg}\left(1-\frac{5}{z}\right)}$$

A) 5 B) 6 C) 3
D) 7 E) 4

20. Sea $P(z)=z^2+2z+a$ con $\text{Im}(a)\neq 0$ si se cumple que $P(ia)=P(a)-i$, $i=\sqrt{-1}$

Halle $P(2a)$

A) $\frac{i-2}{5}$ B) $\frac{i-5}{2}$ C) $i-5$
D) $5-i$ E) $\frac{i-5}{5}$

25. Si $z = \text{cis}\alpha$, $z \in \mathbb{C}$

calcule $\text{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$

A) 1 B) 2 C) 0
D) $2\cos n\alpha$ E) n

26. Sea $P(z) = z^2 + \alpha z + \beta$
donde $\{\alpha ; \beta\} \subset \mathbb{C} - \{(0;0)\}$ tal que se cumple $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ y además $i-1$ es una raíz del polinomio $P(z)$, halle $P(i)$; $i=\sqrt{-1}$

A) $i+2$ B) $2i+1$ C) 0
D) i E) -1

27. Calcule n si
$[(1+i)^7 + (1-i)^7]^n = 4096$

A) 1 B) 2 C) 8
D) 3 E) 4

28. Halle el módulo y argumento principal de

$$z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1-i} . i^{i}$$

A) $e^{-\pi}; \frac{\pi}{4}$ B) $e^{\frac{\pi}{2}}; \frac{\pi}{5}$ C) $e^{\pi}; \frac{\pi}{6}$
D) $e^{\frac{-\pi}{4}}; \frac{5\pi}{4}$ E) $e^{\frac{\pi}{2}}; \frac{\pi}{2}$

29. Si $z=1+i$ calcule el valor de $\left(\frac{1}{z}\right)^{\left(\frac{1}{z}\right)^{\bar{z}^4}}$

A) -4 B) -8 C) -12
D) -1 E) -2

30. Si se cumple

$z_1 = \sqrt{a^{2b} - b^{2a} + 2a^b b^a i}$

$z_2 = \sqrt{b^{2a} - a^{2b} + 2a^b b^a i}$

siendo $z_1 + z_2 = ab(1+i)$,

calcule $\frac{b^{a-1}}{a} + \frac{a^{b-1}}{b}$

A) 2b B) 3 a C) a^a
D) a E) b

31. Si $\bar{z}$ es el conjugado del complejo z de argumento principal θ, además $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^3 = 1$, calcule $\cos 18\theta$

A) $\frac{1}{2}$ B) -1 C) 0
D) 1 E) $\frac{3}{5}$

32. Calcule el módulo del complejo z de tal manera que $\frac{z}{z^2+64}$ resulte un complejo real; $\arg z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

A) 12 B) 5 C) 7
D) 4 E) 8

33. Se tiene la siguiente función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(a+bi) = f(b) + if(a)$, halle $\sum_{k=1}^{2002} f(k+i)$

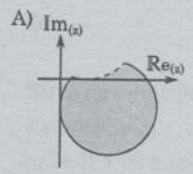
A) 0 B) 2002 C) 2001
D) $2002+200i$ E) 1

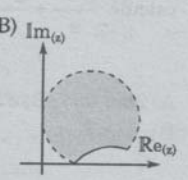
30. Se tiene los conjuntos

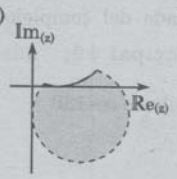
$A=\{z \in \mathbb{C} / |z+i-2| \leq 2\}$

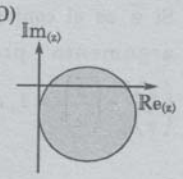
$B=\{z \in \mathbb{C} / |iz+2-i| > 2\}$

halle $A \cap B$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) $\varnothing$

31. Si $z=\dfrac{1+4n^2 i}{8n^2-i}$ $n \in \mathbb{R}$

calcule $\left|z-\dfrac{3}{4}i\right|$

A) $\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{1}{16}$ C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{128}$ E) $\dfrac{1}{64}$

32. Sean los complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} - \{(0; 0)\}$ tal que $z_1 + z_2 = z_2 + z_3 = z_3 + z_1 = a + bi$

halle $\dfrac{(z_1 - iz_2)^4 + (z_3 + iz_2)^4}{[z_1 + z_3 + i(z_2 - z_1)]}$

A) $-\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{2}$ C) 0

D) 1 E) -1

33. Un número complejo más su inverso es igual al conjugado de dicho número. El número complejo es

A) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B) $1+i$ C) $\pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ E) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

34. Calcule el módulo de w si

$$W=\frac{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2+(\bar{z}_1 z_2-z_1\bar{z}_2)i}{\mathrm{Re}(z_1.\bar{z}_2)-\mathrm{Im}(\bar{z}_1.z_2)i}$$

$z_1 ; z_2 \in \mathbb{C}$

A) 4 B) 5 C) 2

D) 3 E) 1

35. Se tiene α, β dos números imaginarios donde $a=\mathrm{Re}(\alpha)$; $b=\mathrm{Re}(\beta)$ $(a \neq b)$ si se cumple que $\alpha+\beta$ es real y $\alpha\beta$ es imaginario puro, halle el máximo valor de $\dfrac{a^3-b^3}{a^2b-ab^2}$

A) -1 B) 3 C) 4

D) 0 E) 1

PROBLEMAS

1. Si la ecuación $x^2-(m+m^2)x+m^3-1=0$ tiene una única solución, indique un valor de m^2-m

A) $-2i$ B) i C) 0
D) 2 E) -1

2. Siendo la ecuación cuadrática $x^2-3x+1=0$ de raíces x_1 y x_2 calcule $(x_1+4)(x_2+6)(x_1+6)(x_2+4)$

A) 2001 B) 1585 C) 2002
D) 1590 E) 1595

3. Calcule el mayor valor entero y positivo para que la ecuación $x^2-nx+3=0$ tenga raíces imaginarias

A) 4 B) 3 C) 5
D) 6 E) 1

4. Halle el valor de k sabiendo que una raíz excede a la otra en 3 unidades
$x^2+(2k+5)x+k=0$

A) -5 B) -7 C) -1
D) -8 E) -2

5. Al resolver las ecuaciones
$ax-2=2(a^2-a-1)$
$\frac{x}{2}-\frac{a}{6}=\frac{x}{3}+2$
se observa que tienen el mismo conjunto solución, calcule a.

A) -5 B) 10 C) 3
D) 14 E) 12

6. Determine n para que la ecuación
$x^2-(n-5)x+9=0$
tenga raíces múltiples; $n \in R^+$

A) 11 B) 4 C) 15
D) 7 E) 8

7. En la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ de raíces $x_1; x_2$, se cumple
$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$
indique la relación que existe entre a; b; c para que se cumpla esta condición

A) $c^2=4bc$
B) $a^2+b^2=c$
C) $b^2=4ac$
D) $\frac{a^2}{b^2}=1$
E) $c^2=2b$

8. Resuelva $ax+b=\frac{a-2bx}{2}$
e indique el valor de verdad de las proposiciones
I. Tiene solución única si $a \neq -b$
II. Si $a=2b$ y $a=-b$ la ecuación no tiene solución
III. No tiene solución si $a=-b$ y $a \neq 2b$
IV. Tiene solución única si $a=b=c \neq 0$

A) FFFV B) VFVF C) VVVV
D) VFFV E) VFVV

9. Sea la ecuación
$x^2 - 7x + 1 = 0$ de raíces a ; b
calcule $(a-1)^4 + (b-1)^4$

A) 376 B) 485 C) 1175
D) 2000 E) 1279

10. Forme una ecuación de 2do. grado cuyas raíces sean respectivamente iguales a la suma y al producto de las dos raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$

A) $x^2 - 7x + 2$
B) $x^2 - x + 1$
C) $x^2 - 2x + 5$
D) $x^2 - 2x + 3$
E) $x^2 - 4x + 3$

11. Si α ; p son raíces de la siguiente ecuación
$x^2 + k = 4x \quad k \in R^+$
Calcule $\dfrac{\alpha^2 + p^2 + 2k}{2}$

A) 6 B) 7 C) 4
D) 8 E) 5

12. De la ecuación
$x^2 - 6x - a^2 + 9 = 0$; $a \in R$
indique el valor de verdad de
I. Si a=0, entonces existe una única solución.
II. Si a<0, tiene raíces no reales.
III. Si $a \neq 0$, tiene dos raíces distintas y reales

A) VVV B) FVF C) FFV
D) VVF E) VFV

13. Si las ecuaciones en x
$(m+2)x^2 - (n^2+3)x - 2 = 0$
$(m+1)x^2 + (n+1)x - 1 = 0$
Admite el mismo conjunto solución, determine mn

A) 4 B) 0 C) 2
D) 15 E) 3

14. Siendo r y s raíces de
$2x^2 - 4x - 1 = 0$
halle el valor de $[(r+1)(s+1)]$

A) $\left(\frac{5}{2}\right)^{24}$ B) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{23}$ C) $\frac{5}{2}$
D) $\left(\frac{5}{2}\right)^{22}$ E) $\left(\frac{5}{2}\right)^{20}$

15. Calcule la suma de raíces no reales en la ecuación $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$

A) 3 B) 4 C) 1
D) 5 E) 2

16. Para cuántos valores del parámetro k el polinomio $P(x) = (k-1)x^2 - (k-1)x + 1$ tiene raíz cuadrada exacta
P sobre los racionales

A) 4 B) 1 C) 5
D) 2 E) 3

17. Halle un valor de x luego de resolver

$$\frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1} = \frac{14}{13}$$

A) 7 B) 9 C) 2
D) 5 E) 1

18. En las siguientes ecuaciones

$x^2 - 5x + k = 0$ ..... (1)

$x^2 - 7x + k = 0$ ..... (2)

una raíz de la ecuación (1) es la mitad de una raíz de la ecuación (2), el valor de k es igual

A) 7 B) 3 C) 9
D) 6 E) 4

19. Resuelva

$$3\left[\frac{1}{2}-\frac{x-1}{x+1}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{9}{x+1}-1\right]$$

A) {4} B) {2} C) ϕ
D) {5} E) {3}

20. Si α y β son raíces de la ecuación $x^2-6x+c=0$ entonces el valor de $\frac{\alpha^2+\beta^2+2c}{9}$ es igual a

A) 15 B) 2 C) +10
D) 6 E) 4

21. Si el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 5x+1 = 0$ es $\{\alpha ; \beta\}$

calcule $\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}$

A) 1/7 B) 2/7 C) 3/4
D) 3/8 E) 3/5

22. Sea la ecuación $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

de raíces x_1 y x_2 determine $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\sqrt{2}$

A) –4/3 B) 3/2 C) 5/2
D) –7/3 E) 1/3

23. Si las ecuaciones tienen una raíz en común

$x^2 + ax + 1 = 0$

$x^2 + x + a = 0$ $\quad a \neq 1$

Halle la menor de todas las raíces

A) –1 B) –3 C) 1
D) 2 E) –2

24. La ecuación $x^2 + 3(n+1)x - 27 = 0$ tiene como conjunto solución {n; nk}, calcule $n + k$; $n \in Z$

A) 12 B) –6 C) 3
D) 9 E) 5

25. Si $\{x_1 ; x_2\}$ es el conjunto solución de la ecuación $3x^2 - (n-4)x + n - 2 = 0$ de modo que $x_1 + x_2 = 3^{-1} x_1x_2$, ¿cuál es el valor de n?

A) 3 B) 5 C) 4
D) 1 E) 2

26. Si $x_1 = (a - b)^2$ es una raíz de

$x^2 - 2(a^2 + b^2)x + k = 0$

determine $\sqrt{k} + b^2$; $a^2 > b^2$

A) $2b^2$ B) $\sqrt{a^2-b^2}$ C) a^2
D) a+b E) a^2+2b^2

27. La diferencia entre la mayor raíz y menor raíz de la ecuación $(2x - 45)^2 - (x - 21)^2 = 0$ es

A) 5 B) 2 C) 3
D) 6 E) 4

28. Halle m+n; si la ecuación cuadrática $1024x^2 - (m^n - 8)x + n^{10} = 0$; $m, n \in R^+$ tiene raíces simétricas y recíprocas

A) $3(\sqrt{2}+1)$ B) $4(\sqrt{2}-1)$ C) $2(\sqrt{2}+1)$
D) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ E) $\sqrt{2}-1$

Tartaglia cedió, al fin, a tan insistentes ruegos y regresó a Venecia, desde donde se carteó con Cardano sobre algunos desarrollos complementarios. Auxiliado por su discípulo Ferrari, aquél consiguió ampliar las reglas de Tartaglia, y en 1545 publicó su famosa Ars. Magna, en cuyo primer capítulo dice lo siguiente: "Escipión del Ferro, de Bolonia, encontró hace tiempo nuestro capítulo verdaderamente bello y admirable del cubo de las cosas iguales al número. Tal arte, superado a toda humana sutileza y al esplendor de todo ingenio mortal, atestigua el valor de su mente, y es cosa de tanta maravilla que quien la ha inventado puede vanagloriarse de que nadie le superará. Émulo suyo es mi amigo Nicolás Tartaglia, de Brescia, quien en una disputa que sostuvo con Antonio María del Fiore, discípulo de Escipión del Ferro, también lo encontró y me lo comunicó a mi ruego, sin demostración".

Irritado por esas palabras sinuosas, Tartaglia desafió a Cardano; pero éste, deseando quedar al margen de toda disputa, se entendió con Ferrari, el cual lo envió a aquel desde Milán, proponiéndole una "controversia pública en lugar cómodo para los dos y ante jueces idóneos, sobre Geometría, Aritmética y todos las disciplinas que dependen de estas", declarando estar dispuesto a hacer un depósito de doscientos escudos destinados al vencedor y dándole un plazo de treinta días para contestarle. La respuesta no se hizo esperar. Nueve días después le escribió Tartaglia aceptando, con la condición que Cardano tomara parte de la contienda.

Después de una serie de carteos entre Ferrari y Tartaglia, éste siempre pidiendo que Cardano formara parte de esta contienda; al final aceptando en principio el desafío matemático, ambos rivales llegaron a un acuerdo sobre las condiciones, el día 24 de julio, citándose para el 10 de agosto en la cátedra Giardino de los recoletos de Milán.

De ésta famosa polémica no conocemos, desgraciadamente, más que las referencias de uno de los contendientes: Tartaglia, lo que impide juzgarle con imparcialidad. Es indudable, pues, que Tartaglia fue quien resolvió la ecuación de tercer grado tal como ha llegado a nosotros, con absoluta independencia del método empírico que Escipión del Ferro consiguió en el cuaderno que todavía no se ha encontrado a pesar de las pacientes y minuciosas búsquedas de matemáticos e historiadores ; pero como fue Cardano quien le dio a conocer y además en latín, que era el idioma científico de la época – ha pasado a la historia con el injusto título de Fórmula Cardámica, negándosele a Tartaglia incluso la reparación póstuma a que tiene indudable derecho.

Ecuaciones Polinomiales de grado superior

DEFINICIÓN

Son aquellas ecuaciones polinomiales que se reducen a la siguiente forma general:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Donde: $a_0 \neq 0$, $n \in Z \wedge n \geq 2$

Resolución:

Para resolver estas ecuaciones se han desarrollado una diversidad de técnicas y artificios, que en su mayoría permiten hallar los valores aproximados de sus raíces.

En el presente capítulo, bajo ciertas condiciones la resolución de algunas de estas ecuaciones hacen uso de los siguientes teoremas:

TEOREMA I

Toda ecuación polinomial de coeficientes reales admite raíz imaginaria $(a+bi)$, si y sólo si $(a-bi)$ es raíz imaginaria, donde $b \neq 0$.

TEOREMA II

Toda ecuación polinomial de coeficientes racionales tiene raíz $(a+\sqrt{b})$, si y sólo si $(a-\sqrt{b})$ es raíz, donde $a \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{b} \in \mathbb{I}$

TEOREMA III

Toda ecuación polinomial de coeficientes racionales tendrá como raíces a: $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $-\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $-\sqrt{a}+\sqrt{b}$, si y sólo si una de ellas está presente ($\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ son irracionales).

En seguida analicemos algunas ecuaciones polinomiales de grado superior muy importantes:

ECUACIÓN CÚBICA

Llamada también ecuación polimonial de grado 3 cuya forma general es:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \ ; a \neq 0$$

Mediante la sustitución x por $\left(x-\frac{b}{3a}\right)$ se puede obtener la siguiente ecuación en x

$$x^3+px+q=0 \quad \ldots(\alpha)$$

Para solucionar la ecuación anterior, definamos $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$

entonces sus raíces de α serán:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w^2$$

$$x_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}\,w^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}\,w$$

donde: $w = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad / i = \sqrt{-1}$

Ejemplo

Resuelva: $x^3 - 15x - 126 = 0$

Resolución

$\sqrt{\Delta} = 62$

$x_1 = 5+1 = 6$

$$x_2 = 5\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$x_3 = 5\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

C.S. $= \{6 ; -3+2\sqrt{3}i ; -3-2\sqrt{3}i\}$

ECUACIÓN BICUADRADA

Definición

Es aquella ecuación de cuarto grado que presenta la siguiente forma general:

$$ax^4+bx^2+c=0 \ ; abc \neq 0$$

Ejemplo:

a. $P(x) = x^4-13x^2+36 = 0$
b. $f(x) = x^4-9x^2+8 = 0$
c. $g(x) = 2x^4-7x^2+7 = 0$

Teoremas

Sea la bicuadrada en "x":

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ ; abc \neq 0$$

Si "m" y "n" son dos raíces no simétricas, entonces: "-m" y "-n" también lo serán:

Luego:

1. $\boxed{C.S. = \{m; -m; n; -n\}}$

2. $\boxed{m^2 + n^2 = -\frac{b}{a}}$

3. $\boxed{m^2 . n^2 = \frac{c}{a}}$

Ejemplo:

Resuelva: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Resolución

Por aspa simple

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\rightarrow x^2 \quad -9$$

$$\rightarrow x^2 \quad -4$$

$(x^2-9)(x^2-4) = 0 \rightarrow (x+3)(x+3)(x+2)(x-2) = 0$

C.S. = {3, -3, 2, -2}

¿CÓMO RECONSTRUIR UNA ECUACIÓN BICUADRADA?

Conociendo dos raíces, cuya suma no sea cero. (no simétricas)

Una ecuación bicuadrada en "x", donde dos de sus raíces son "m" y "n" $(m+n \neq 0)$ viene dada por:

$$\boxed{x^4 - (m^2+n^2)x^2 + m^2n^2 = 0}$$

Ejemplo:

Forme una ecuación bicuadrada donde dos de sus raíces son 5 y 2.

Resolución

$m = 5; \ n = 2$

$\Rightarrow x^4-(5^2+2^2)x^2+5^2.2^2 = 0$

$\therefore \ x^4-29x^2+100 = 0$

ECUACIÓN BINOMIA

Es aquella ecuación de dos términos y que presenta la siguiente forma general:

$$\boxed{ax^n + b = 0}$$

donde: $ab \neq 0 \quad n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 3$

Para resolver esta ecuación podemos aplicar productos notables o los criterios de factorización, así como también las aplicaciones de los números complejos.

En: $ax^n+b = 0$

$$\Rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$$

Luego:

i. Si: $\frac{b}{a} < 0$

$$\Rightarrow x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}(1)} = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} . \sqrt[n]{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_k = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

Aplicación 3

Resuelva

$$x^6+19x^3-216=0$$

Factorizada la ecuación, tenemos:

$$(x^3+27)(x^3-8)=0$$

i. $x^3+27=0$

$\Rightarrow x^3=-27$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{-27}\sqrt[3]{1}$

$\Rightarrow x=-3\sqrt[3]{1}$

$\Rightarrow x_1=(-3)(1)=-3$

$$x_2=(-3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

$$x_3=(-3)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

$$\text{C. S.}=\left\{-3;\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i;\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i\right\}$$

ii. $x^3-8=0$

$\Rightarrow x^3=8$

$\Rightarrow x=\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{1}$

$\Rightarrow x=2.\sqrt[3]{1}$

$\Rightarrow x_4=(2)(1)=2$

$$\Rightarrow x_5=(2)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow x_6=(2)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}i$$

$\Rightarrow$ C.S. = $\{2;-1+\sqrt{3}i;-1-\sqrt{3}i\}$

Aplicación 4

Resuelva: $x^6-10x^3+16=0$

$$x^6-10x^3+16=0$$

x^3 — -8

x^3 — -2

$(x^3-8)(x^3-2)=0$

$x^3=8 \quad \vee \quad x^3=2$

$x=\sqrt[3]{8} \quad \vee \quad x=\sqrt[3]{2}$

$x_1=2 \quad ; \quad x_4=\sqrt[3]{2}$

$x_2=2w \quad ; \quad x_5=\sqrt[3]{2}w$

$x_3=2w^2 \quad ; \quad x_6=\sqrt[3]{2}w^2$

donde: $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \;/\; i=\sqrt{-1}$

POLINOMIO RECÍPROCO

Definición

Dado el polinomio P(x) no constante y de grado "n" con término independiente no nulo, diremos que P(x) es recíproco si y sólo si se cumple:

$$P(x)\equiv x^n.P\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $P(x)=2x^3-7x^2-7x+2$
- $P(x)=6x^4+35x^3+62x^2+35x+6$

Las propiedades que presentan los polinomios recíprocos nos conducen al estudio de interesantes temas como por ejemplo las ecuaciones recíprocas.

LA ECUACIÓN RECÍPROCA

Es aquella ecuación cuyos coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son de igual valor; presentan la siguiente forma general:

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+.....+cx^2+bx+a=0$$

donde $n\in Z \;\wedge\; n\geq 2$

Estas ecuaciones si presentan como solución a:m, entonces también aceptarán como solución a: $x=\frac{1}{m}$, como "m" y "$\frac{1}{m}$" son recíprocos y raíces de la ecuación, a esta singularidad se debe el nombre de "Ecuación recíproca".

Para la resolución se debe agrupar los términos equidistantes de los extremos, factorizar $x^{\frac{n}{2}}$ (si n es par) para luego realizar el siguiente cambio de variable:

$$x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \\ x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y \end{cases}$$

Para que la resolución sea más clara, veamos los dos siguientes casos:

Ecuación recíproca de grado par

Como casos particulares podemos indicar las siguientes ecuaciones

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$

Aplicación 5

Resolver: $\underbrace{12x^4-4x^3-41x^2-4x+12}_{P_{(x)}}=0....(\alpha)$

$$\Rightarrow P_{(x)}=x^2\left[12x^2-4x-41-\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}\right]$$

$$\Rightarrow P_{(x)}=x^2\left[12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41\right]....(1)$$

Hacemos: $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

En el corchete de (1):

$12(y^2-2)-4(y)-41$

$\Rightarrow 12y^2-4y-65$

$\Rightarrow (6y+13)(2y-5)$

$$\Rightarrow P_{(x)}=x^2\left[6\left(x+\frac{1}{x}\right)+13\right]\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]$$

Luego, en la ecuación (α)

$$x^2\left[6\left(x+\frac{1}{x}\right)+13\right]\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{6x^2+13x+6}{x}\right)\left(\frac{2x^2-5x+2}{x}\right)=0$$

$\Rightarrow (3x+2)(2x+3)(x-2)(2x-1)=0$

$\Rightarrow 3x+2=0 \vee 2x+3=0 \vee x-2=0 \vee 2x-1=0$

$$\Rightarrow x=-\frac{2}{3} \vee x=-\frac{3}{2} \vee x=2 \vee x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{C. S.}=\left\{-\frac{2}{3};\ -\frac{3}{2};\ 2;\ \frac{1}{2}\right\}$$

Ecuación recíproca de grado impar

Como casos particulares se tienen ecuaciones de la forma:

$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$

$ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+dx^3+cx^2+bx+a=0$

Esta ecuación tiene como solución a: $x=1 \vee x=-1$, entonces se podrá aplicar la regla de Ruffini para tener una ecuación de grado menor a la propuesta.

Aplicación 6

Resolver $6x^5-41x^4+97x^3-97x^2+41x-6=0$

La ecuación se verifica para $x=1$

	6	-41	97	-97	41	-6
$x=1$	⇓	6	-35	62	-35	6
	6	-35	62	-35	6	0

$\Rightarrow (x-1)(6x^4-35x^3+62x^2-35x+6)=0$

$$\Rightarrow (x-1)x^2\left[6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}\right]=0$$

$$\Rightarrow (x-1)x^2\left[6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62\right]=0 \ ...(2)$$

Hacemos: $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

En el corchete de (2):

$6(y^2-2)-35y+62$

$\Rightarrow 6y^2-35y+50$

$\Rightarrow (2y-5)(3y-10)$

$\Rightarrow \left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]\left[3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right]$

En (2): $(x-1)x^2\left(\frac{2x^2-5x+2}{x}\right)\left(\frac{3x^2-10x+3}{x}\right)=0$

$\Rightarrow (x-1)(2x^2-5x+2)(3x^2-10x+3)=0$

$\Rightarrow (x-1)(2x-1)(x-2)(3x-1)(x-3)=0$

$\Rightarrow x-1=0 \vee 2x-1=0 \vee x-2=0 \vee 3x-1=0 \vee x-3=0$

$\Rightarrow x=1 \vee x=\frac{1}{2} \vee x=2 \vee x=\frac{1}{3} \vee x=3$

$C.S.=\left[1;\frac{1}{2};2;\frac{1}{3};3\right]$

Ejercicios:

Resolver:

1. $x^6+28x^3+27=0$
2. $2x^4+3x^3+13x^2+3x+2=0$
3. $2x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+2=0$

Finalmente veamos una ecuación no polinomial muy importante.

ECUACIÓN FRACCIONARIA

Es aquella que se presenta como la división de dos polinomios, cuya forma general es:

$$\frac{f(x)}{h(x)}=0$$

donde $h(x)$ es un polinomios no constante.

Resolución:

Para resolver esta ecuación, se sugiere seguir, los siguientes pasos:

i. Asegurar la existencia de la expresión $\frac{f(x)}{h(x)}$, para lo cual se debe asegurar que $h(x)\neq 0$. De aquí se obtiene un conjunto de valores que puede asumir la incognita.

ii. Procurar, en lo posible, transformar la fraccionaria, en una polinomial; cuya resolución la conocemos obteniéndose un conjunto solución.

iii. Finalmente el conjunto solución de la ecuación fraccionaria, es la intersección de los conjuntos obtenidos en los pasos *(i)* y *(ii)*.

Observación:

La resolución de las ecuaciones fraccionarias las realizaremos en el campo de los númros complejos, a menos que se diga lo contrario.

Ejemplo:

Resuelva $\frac{x^2}{x-2}+5=\frac{4}{x-2}$

Resolución:

$\frac{x^2-4}{x-2}+5=0 \wedge x\neq 2$

$\Rightarrow x+2+5=0 \Leftrightarrow x+7=0$

$\Rightarrow x=-7$

$\therefore$ C.S. = {–7}

PROBLEMAS

1. En la ecuación

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

se cumple que una raíz es la opuesta de la otra, ¿qué condición existe entre a, b y c?

A) $c - ab = 0$
B) $a = bc$
C) $c^2 = ab$
D) $c + ab = 0$
E) $b^2 = ac$

2. En la ecuación

$$3x^4 + \left(n^2 - \frac{n}{9}\right)x^2 + n = 0$$

se tiene que $x_1 x_2 x_3 = \frac{n}{9}$, donde $x_1 ; x_2 ; x_3$ son raíces de la ecuación anterior. Halle n.

A) $\pm\sqrt{3}i$ B) ± 3 C) $\pm 3i$
D) $\pm 3\sqrt{3}$ E) $-3i$

3. Sea la ecuación polinomial compleja

$P(x) = ix^3 + 3x^2 - 3ix + 2 = 0$

indique el valor de verdad;

I. Posee sólo una raíz real.
II. Posee 3 raíces imaginarias.
III. Posee 2 raíces reales y 1 imaginaria.

A) VVF B) VVV C) FFF
D) VFF E) FVF

4. Sea la ecuación en x

$$x^2 + mx + n = 0$$

donde $m \notin \mathbb{Q}$; $n \in \mathbb{Z}$, además posee una raíz $\sqrt{2} - 1$. Halle el mínimo valor $m^2 + n^2$

A) 57 B) 53 C) 9
D) 5 E) 8

5. Se tiene la siguiente ecuación

$$x^5 - 5x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

donde $\{a; b; c\} \subset \mathbb{Q}$ y $\sqrt{2}+2$ es una raíz de la ecuación. Halle la suma de productos binarios de las 3 raíces racionales.

A) -6 B) -1 C) 5
D) 1 E) 6

6. Siendo a, b y c las raíces de la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

indique la menor raíz, luego de resolver la siguiente ecuación

$$x^2 + 11abcx + a^4 + b^4 + c^4 = 0$$

A) 4 B) 5 C) 2
D) 6 E) 3

7. Dada la ecuación en x

$$\frac{9}{x-3} + x + 3 = a \quad (a \in \mathbb{Z})$$

¿cuántos valores posee **a** para que la ecuación sea incompatible en R?

A) 10 B) 8 C) 11
D) 12 E) 9

10. Si la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$
tiene raíces a, b, c
calcule $a^4(a+1) + b^4(b+1) + c^4(c+1)$

A) –4 B) –6 C) –5
D) –2 E) –3

11. Determine la condición que debe cumplir el parámetro real λ de manera que
$x^4 - 2(\lambda-1)x^2 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$
Admita al menos una raíz real y otra imaginaria.

A) $0 \leq \lambda < 2$
B) $-2 < \lambda < 0$
C) $\lambda > 2 \wedge \lambda > 3$
D) $\lambda < 0$
E) $\lambda < 2$

12. Dada la ecuación polinomial
$x^n - ax^{n-1} + bx - an = 0 \ ; \ n > 3$
si se cumple que el producto de raíces es cinco veces la suma de raíces $(a; b \in \mathbb{R}^+)$, además "a" es una raíz. Halle n + b

A) 11 B) 12 C) 9
D) 13 E) 10

13. En la siguiente ecuación recíproca
$x^5 + 3x^4 - 4x^{n-3} + ax^2 + bx + c = 0 \ ; \ abc \neq 0$
donde $n \in \mathbb{Z} \wedge 6 < n < 9$
¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación?

A) 7 B) 8 C) 4
D) 3 E) 6

14. Si $x^{2003} + x^2 + x + 1 = 0$
tiene como raíces $\alpha_1 ; \ldots ; \alpha_{2003}$
calcule $\alpha_1^{2003} + \ldots + \alpha_{2003}^{2003}$

A) –3 B) 2003^2 C) 3
D) 0 E) –2003

15. Sea la ecuación polinomial de grado n;
n: # par
$x^n - 2x^2 - 3x + 1 = 0$
de raíces: $a_1; a_2; \ldots; a_n$
Calcule $\prod_{i=1}^{n} (2 - a_i) - 2^n$

A) 11 B) 4 C) 13
D) –13 E) 10

16. Resuelva
$$\frac{(a+b+c-x)^3 + (a+b-c+x)^3}{(a+b+c-x)^2 + (a+b-c+x)^2} = 2(a+b)$$

A) {a+b; a–c}
B) {a+b+c; c–a–b}
C) {a+b+c; a+b–c}
D) {a+b+c}
E) {c–a–b}

17. Dada las ecuaciones en x
$ax^3 + bx^2 + (a - 6b)x + 3 = 0 \ ; \ abc \neq 0$
$x^2 + (a+1)x + c = 0$
poseen el mismo C.S.={a; c}
Halle a+2c+3b

A) 5 B) 0 C) 3
D) 2 E) 4

16. Con respecto a la ecuación
$x^7 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
Indique el valor de verdad de cada proposición
I. La ecuación presenta 3 raíces reales y 4 imaginarias.
II. Presenta 5 raíces reales y 2 imaginarias.
III. Presenta 1 raíz real y 6 imaginarias.

A) FFV B) FVV C) VFF
D) FVF E) FFF

17. Resuelva
$x^7 - 20x^5 - 2x^4 + 40x^2 + 64x^3 - 128 = 0$
dé como respuesta la suma de todas las raíces reales

A) $\sqrt{20}$ B) $2\sqrt[3]{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt[3]{2}$ E) 20

18. Calcule b en la ecuación bicuadrada
$ax^4 + 48x^2 + b = 0$
si las raíces de la ecuación cumplen con las siguientes condiciones
$x_1 = x_3 \; ; \; (x_2x_4)^{-1} + (x_1x_3)^{-1} = 12$

A) 8 B) 4 C) 5
D) 6 E) 2

19. Dada la ecuación
$x^4 + 3x^3 + \lambda x^2 + 6x + 4 = 0$
Halle λ, para que tenga 2 raíces tal que su producto es 2 y la suma de las otras 2 raíces sea 1.

A) 1 B) 2 C) 0
D) –1 E) –2

20. Dadas las ecuaciones en x
$(x+1)^4 + m(x+1)^2 + nx + 2 = 0$
$(x-1)^4 + m(x-1)^2 + nx - 1 = 0 \; ; \; m \in \mathbb{Q}$
los cuales posee una raíz racional en común. Halle cuántos posibles valores puede tomar **m**.

A) 12 B) 24 C) 16
D) 13 E) 18

21. Dada la ecuación en x
$x^7 + p^2x - q^2 = 0 \quad p.q \neq 0$
si una solución es $r \in \mathbb{R} - \{0\}$
halle el producto de las raíces imaginarias

A) $\frac{p^2 - q^2}{r}$ B) $\frac{r}{p-q}$ C) $\frac{p+q}{r}$
D) $\frac{q^2}{r}$ E) $\frac{p-q}{r}$

22. Dada la ecuación en x
$x^7 + ax + 2 = 0$
indique el valor de verdad de
I. Si $a \geq 0$ posee una sola raíz real
II. Si $a < 0$ existen al menos 3 raíces reales.
III. Si $a < 0$ existen a lo más 3 raíces reales.

A) VVV B) VFV C) VVF
D) FVF E) FFV

23. Una ecuación polinomial de coeficientes racionales y noveno grado es tal que la suma de sus tres soluciones es 10 y la suma de sus raíces es 29. Calcule la parte real de su raíz imaginaria de multiplicidad 2.

A) 13/4 B) 15/2 C) 2
D) –5/4 E) 7/2

24. Dado $A=[a_{ij}]_{n\times n}$; $T=[t_{ij}]_{n\times n}$; $n\geq 3$
al multiplicar T.A. los elementos de la segunda fila de A quedan aumentados en el doble de los elementos de la primera fila y la tercera fila de A queda triplicada. Obtenga la matriz T e indique la suma de sus elementos.

A) n+3 B) 2n+1 C) 7
D) n^2 E) n+4

25. Halle la suma de los elementos de $A^{20}+I$,
donde $A=\begin{bmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

A) –13 B) 11 C) 14
D) 15 E) 13

26. Dado la matriz simétrica

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$$

halle $Tz(A+A^{-1})$

A) –1/3 B) 47/6 C) 2/3
D) 3 E) 1/6

27. Calcule el siguiente determinante de orden (n+1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & & \\ -n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

A) 1 B) 0 C) n
D) –1 E) n+1

28. Calcule A^8 si $A=\begin{bmatrix} 1+a & -1 \\ 1+a^2 & 1-a \end{bmatrix}$

A) $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 2a & 2 \\ 2(1+a^2) & 2a \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

E) $\begin{bmatrix} 1-a & 1+a^2 \\ 1+a & 1-a^2 \end{bmatrix}$

29. Sea $A=[a_{ij}]_3$ / $|x\,I-A|=x^3-6x^2+3x+2$
calcule el término lineal del polinomio
$P(\lambda)=|\lambda I-A^{-1}|$

A) 3λ B) -3λ C) -6λ
D) $-\lambda$ E) 2λ

30. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

calcule las raíces de la ecuación en x
$|xI-(A^3+A+I)|=0$; $x\in\mathbb{R}$
indique la menor solución

A) 131 B) –131 C) 0
D) –9 E) 10

38. Dada la matriz

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

calcule $\det(M.M^t)+\det(M^t.M)$

A) -1 B) 1 C) 250
D) 0 E) 281

39. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & n\\ m & p\end{bmatrix}$ tal que $A^5=\sqrt{2}A^4$, calcule el valor de $\det\left[\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}(A+A^t)\right]$

A) mn B) 4 C) -1
D) 1 E) m+n

40. Dado el polinomio $P(x)=x^{19}+2x-1$ y la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

halle la traza de P(A)

A) -2 B) 0 C) 4
D) -1 E) 1

41. Calcule

$$\begin{vmatrix}13 & 3 & 4 & 1\\ -11 & 4 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}13 & 1 & 5 & 3\\ -11 & 1 & 11 & 4\\ 2 & -1 & 15 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

A) 15 B) 1 C) 0
D) 13 E) -11

42. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

si $AA^tB=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, halle (ab+cd)

A) 121 B) 377 C) 181
D) 243 E) 633

43. Calcule

$$\sqrt[5]{\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}$$

A) 1 B) -1 C) $\sqrt[5]{3}$
D) 15 E) 0

44. Obtenga el valor de la siguiente suma

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 55\\ 0 & 2 & 15\\ 1 & 1 & 341\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6 & -1 & 55\\ 1 & 2 & 15\\ 2 & 1 & 341\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}9 & -1 & 55\\ 2 & 2 & 15\\ 4 & 1 & 341\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}12 & -1 & 55\\ 3 & 2 & 15\\ 8 & 1 & 341\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}30 & -1 & 55\\ 9 & 2 & 15\\ 512 & 1 & 341\end{vmatrix}$$

A) 2 B) 1 C) 0
D) 1024 E) 2043

45. Calcule $\det(P^{-1}AP+2I)$

Si $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 3 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$; $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

A) 15 B) 0 C) 18
D) 8 E) 28

38. Dada la matriz

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

calcule $\det(M.M^t)+\det(M^t.M)$

A) –1 B) 1 C) 250
D) 0 E) 281

39. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}0 & n\\ m & p\end{bmatrix}$ tal que $A^5=\sqrt{2}A^4$, calcule el valor de $\det\left[\dfrac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}(A+A^t)\right]$

A) mn B) 4 C) –1
D) 1 E) m+n

40. Dado el polinomio $P(x)=x^{19}+2x-1$ y la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

halle la traza de P(A)

A) –2 B) 0 C) 4
D) –1 E) 1

41. Calcule

$$\begin{vmatrix}13 & 3 & 4 & 1\\ -11 & 4 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}13 & 1 & 5 & 3\\ -11 & 1 & 11 & 4\\ 2 & -1 & 15 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

A) 15 B) 1 C) 0
D) 13 E) –11

42. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

si $AA^tB=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, halle (ab+cd)

A) 121 B) 377 C) 181
D) 243 E) 633

43. Calcule

$$\sqrt[5]{\begin{vmatrix}2 & 0 & 1 & 2 & \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}$$

A) 1 B) –1 C) $\sqrt[5]{3}$
D) 15 E) 0

44. Obtenga el valor de la siguiente suma

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 55\\ 0 & 2 & 15\\ 1 & 1 & 341\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6 & -1 & 55\\ 1 & 2 & 15\\ 2 & 1 & 341\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}9 & -1 & 55\\ 2 & 2 & 15\\ 4 & 1 & 341\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}12 & -1 & 55\\ 3 & 2 & 15\\ 8 & 1 & 341\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}30 & -1 & 55\\ 9 & 2 & 15\\ 512 & 1 & 341\end{vmatrix}$$

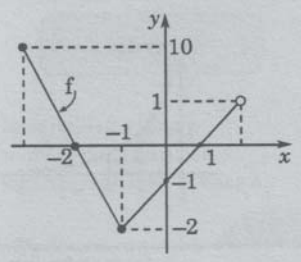
A) 2 B) 1 C) 0
D) 1024 E) 2043

45. Calcule $\det(P^{-1}AP+2I)$

Si $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ -3 & 3 & 9\\ 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$; $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

A) 15 B) 0 C) 18
D) 8 E) 28

44. Dada la gráfica de la función f



halle el Ranf∩Domf

A) ⟨–2; 10⟩ B) [–2; –1] C) [–2; 10]
D) [–2; 1] E) [–2; 2⟩

45. Si la función

$f(x) = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9}$

es constante $\forall\, x \in [m; n]$, calcule m+n

A) 1 B) 2 C) 0
D) –1 E) –2

46. Dada la función g tal que

$g(x) = |x+3| - |x-3|$ cuyo rango es [a; b], calcule a + b

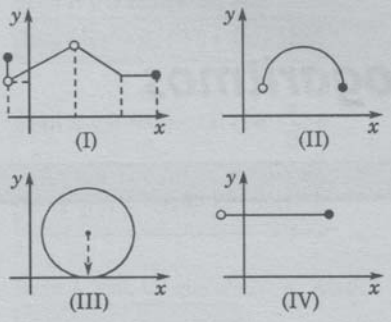
A) 2 B) 4 C) 3
D) 0 E) 1

47. Si $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2$; $x > 0$

$(fogoh)(x) = \sqrt{2x^2-1}$, halle h(1)+h(2)

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ C) $1+\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}-1$ E) $1-\sqrt{7}$

48. Indique cuál de las siguientes gráficas representa una función



A) IV
B) I – II
C) I, II y IV
D) II y IV
E) III

49. Halle el rango de $f: \langle -1; 1\rangle \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

A) $\left\langle \frac{1}{2}; 1 \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$ C) $\langle 1; +\infty \rangle$

D) $\left\langle -\infty; \frac{1}{2} \right\rangle$ E) $\left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$

50. Dadas las funciones

f = { (1;2), (2;–3), (–3;1) }
g = { (2; b), (1;2), (–3; a) }
si gof = f–g, calcule a + b

A) –1 B) –4 C) 0
D) –2 E) –3